4. cvičení - Limity posloupností 2

☎= příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1. Vypočítejte následující limity.

(a) $\lim_{n\to\infty}(5^n - 3^{2n+1})$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n \cdot n!}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n}+2n}{n!+\sqrt{n}}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^6+7n^3-5}{50n^5-24n^2}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot 7^n+n^3\cdot 5^n}{-3n\cdot 7^n+\sqrt{n}\cdot 6^n}$

(f) ☎$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)$

(g) ☎$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+n\cdot\sin(2n)}{n\cdot\cos(3n)+(2n+\sin(4n))^2}$

Příklad 2. Vypočítejte následující limity.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^n+2^n+3^n+4^n+5^n}{(5{,}00001)^n}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

(d) ☎$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5+(n+1)!}{n(n^6+n!)}$

(e) ☎$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4+2^n+3^n}$

(f) ☎$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$

(g) ☎$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n+n} - n$

(h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n} - \sqrt{3^n+2^n}}$

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$

(j) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}}$

(k) ☎$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{2n}}$

(l) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}$

(m) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+2^{n+1}+\ldots+2^{2n}}$

Příklad 3. Vypočítejte následující (možno sa vám bude hodiť druhé cvičenie).

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n+1}{2}\right)$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\ldots+n}{n^2}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$

(e) ☎$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$, pro $a,b,c>0$

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}}$, pro $a>b>0$

Příklad 4. Vypočítejte následující limity.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor^3}{n-\lfloor\sqrt{n+9}\rfloor}$

(b) ☎$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+\lfloor 2\sqrt{n}\rfloor+\cdots+\lfloor n\sqrt{n}\rfloor}$

Máte nějakou připomínku, nebo jste našli chybu či překlep v řešení? Pište sem:

Příklad 5. Dokažte následující:

(a) pro $a > 1$ platí $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$

(b) pro $a \in (0,1)$ je $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

(c) Platí $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

(d) Pro $a > 0$ je $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

(e) Pro $a > 1, b > 0$ platí $\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$

(f) Platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

(g) Pro $a > 0$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(h) Pro $a > 0$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$

(i) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$